MEHR ZU VEKTORRÄUMEN

Vektorräume treten in der Physik sehr häufig auf, nicht nur als der drei-dimensionale Anschauungsraum. Das Arbeiten in Vektorräumen, genannt *lineare Algebra* gehört zu den absolut grundlegenden Fertigkeiten, die man als Physiker beherrschen sollte. Dies Übungen bereiten ein paar dieser Fertigkeiten vor.

[P8] *Duale Basis*
Wir betrachten einen n-dimensionalen Vektorraum mit Basis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$. In dieser Basis sind einem Vektor $\vec{w}$ die Komponenten w^i, $i = 1, 2, \ldots, n$, über die Entwicklung $\vec{w} = \vec{e}_k\, w^k$ zugeordnet.

(a) Warum sind die Abbildungen $\{f^1, f^2, \ldots f^n\}$, die Vektoren $\vec{w}$ auf die zugehörigen Komponenten abbilden,

$$f^i(\vec{w}) = w^i \quad \text{mit} \quad i = 1, 2, \ldots, n\,,$$

linear?

(b) Warum sind die Abbildungen $\{f^1, f^2, \ldots, f^n\}$ linear unabhängig?

[P9] *Permutationen*
Eine Permutation π ist eine invertierbare Selbstabbildung einer Menge von n Elementen, zum Beispiel der ersten n natürlichen Zahlen: $\pi:\ i \mapsto \pi(i)$ für $i = 1, \ldots, n$.

(a) Wie viele verschiedene Permutationen von n Elementen gibt es?

(b) Zeigen Sie für jede Permutation π, dass

$$\pi^{n!} = \underbrace{\pi \circ \pi \circ \ldots \circ \pi}_{n!\ \text{Faktoren}} = e\,.$$

Gehen Sie von der Beobachtung aus, dass es für jedes π natürliche Zahlen k und ℓ, $k \neq \ell$, geben muss, so dass $\pi^k = \pi^\ell$. ist.

(c) Wie viele Elemente hat die Gruppe $G_\pi = \{\pi^0, \pi^1, \pi^2, \ldots, \pi^k, \ldots\}$?

[P10] *Flächeninhalt und Volumen*
Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix}5\\7\\-2\end{pmatrix}$.

(a) Wie groß ist die Fläche des Parallelogramms mit Kantenvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$?

(b) Bezeichnet $\vec{a} \wedge \vec{b}$ ein Loch oder einen Flecken?

(c) Welches Volumen spannen $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ auf?

[P11] *Lorentz-Transformationen*
Es bezeichne $k = \sqrt{\dfrac{1+v}{1-v}}$ und $t_+ = t + x$ und $t_- = t - x$. Es stehe hier t für die Zeit, zu der in einer Dimension der Punkt x durchlaufen wird.

(a) Was sind $\frac{1}{2}(k + 1/k)$ und $\frac{1}{2}(k - 1/k)$?

(b) Wie drücken sich t und x durch t_+ und t_- aus?

(c) Schreiben Sie die zwei ein-dimensionalen linearen Transformationen

$$\Lambda_v : \quad \begin{aligned} (t_+) &\mapsto (k\, t_+) \\ (t_-) &\mapsto (\frac{1}{k}\, t_-) \end{aligned}$$

als Transformation von $\binom{t}{x} \mapsto \binom{t'}{x'}$.

(d) Welche Eigenschaft hat dann umgangssprachlich die Weltlinie $t \mapsto \binom{t}{0}$, welche entsprechende Eigenschaft die transformierte Weltlinie $\binom{t'}{x'}$?